제 2 강. 알고리즘과 알고리즘의 성능

1. 알고리즘의 정의
2. 정렬과 검색 알고리즘
3. 알고리즘의 성능

1. 알고리즘의 정의

알고리즘은 **어떤 일을 하는 절차**를 말한다.

컴퓨터에서는 프로그램이 수행할 작업을 말하며 형식적으로 정의하면 다음과 같다.

- 정의(Definition)

  명령의 집합

  (a finite set of instructions to accomplish a particular task)

- 조건(Criteria) – 알고리즘이 갖출 조건

  (1) 입력이 있다 : zero or more inputs

  (2) 출력이 있다 : at least one output

  (3) 명확해야 한다 : clear and unambiguous instruction

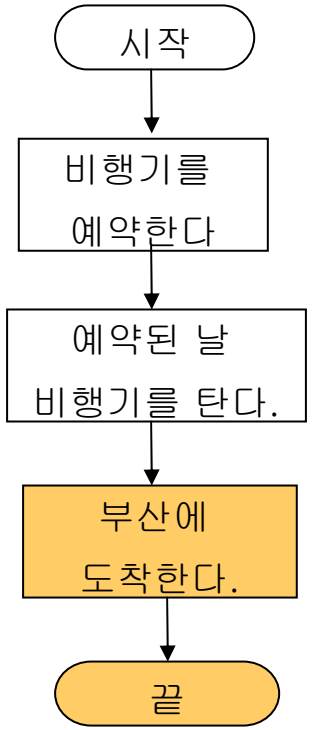
  (4) 유한성 : terminates after a finite number of steps

알고리즘의 서술은 3가지 기능 (순서, 반복, 조건)으로 한다.

1.1 일상생활의 알고리즘의 예

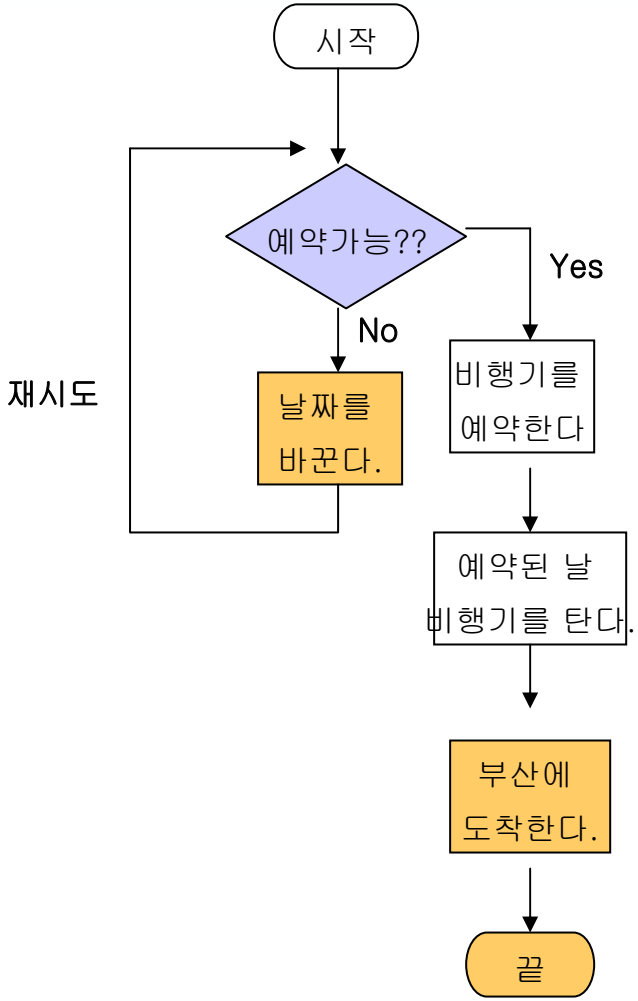
– 알고리즘은 명령어들이 다음과 같이 3가지로 합성된다
  연속(sequence) – 명령어 다음에 명령어가 나온다
  반복(repetition) – 명령어가 반복이 된다.
  조건(condition) – 조건에 따라 명령의 수행이 결정된다.

예1) 서울에서 부산가는 방법을 컴퓨터 알고리즘으로 기술하면 다음과 같다.



1.1 일상생활의 알고리즘의 예

예2) 비행기 표가 없을 경우 반복과 조건이 포함된다.

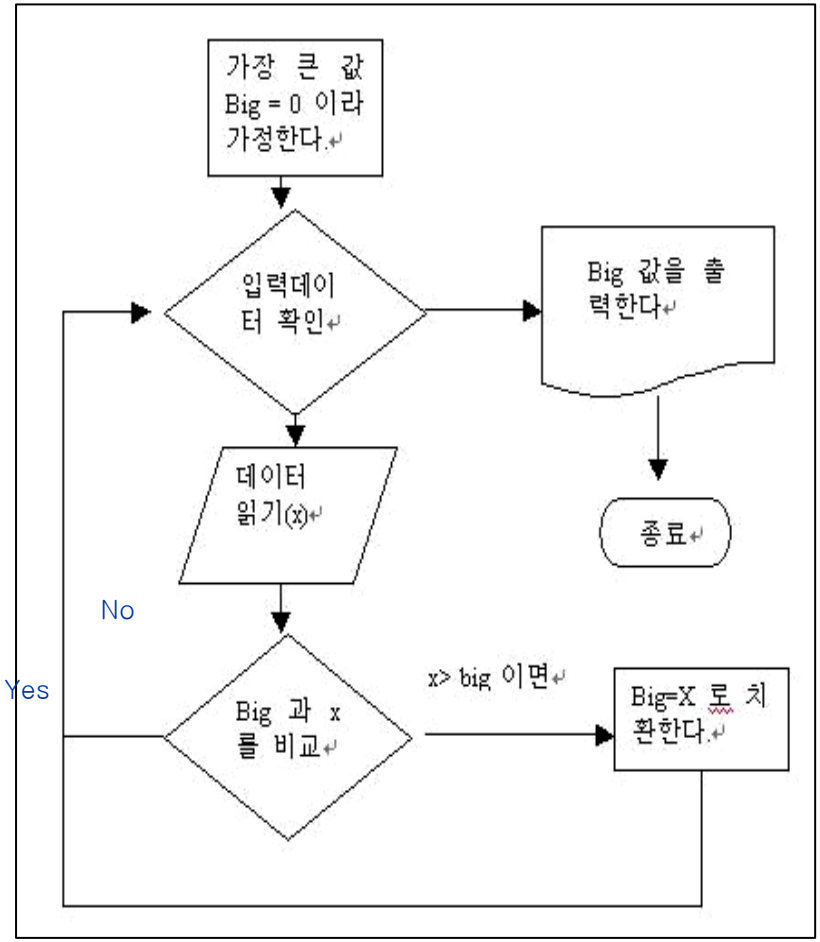


1.2 컴퓨터의 알고리즘의 예

컴퓨터 알고리즘의 예)

데이터 개수 n개에서 큰 수를 찾는 알고리즘을 기술하여보자

데이터를 한 개씩 읽어서 가장 큰 수 라고 기억된 수와 비교하여 큰 수를 찾아 나간다.



2. 정렬과 검색 알고리즘

컴퓨터 분야의 문제 중에서 가장 방법이 많고 많이 쓰이는 알고리즘이 정렬(Sorting)과 검색(Searching)이다.

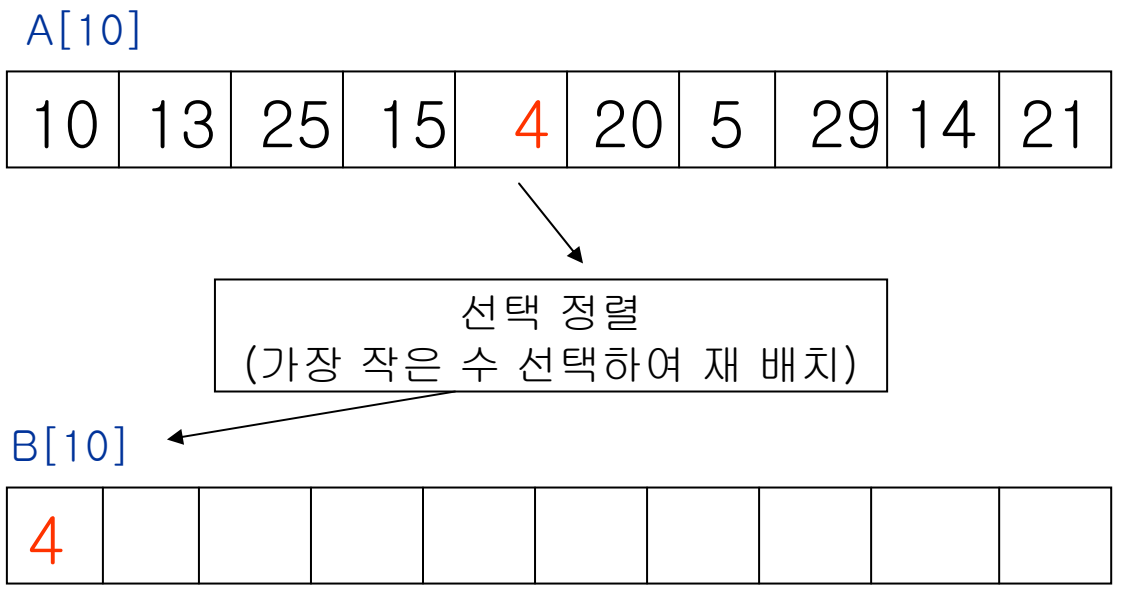
정렬은 흩어져있는 데이터를 키 값(주민등록번호, 학번 등)을 이용하여 순서대로 열거하는 알고리즘이다.

검색은 데이터(정렬이 안된 데이터, 정렬이 된 데이터)에서 키 값에 해당되는 데이터를 찾는 알고리즘이다. 앞 장에서 학습한 바와 같이 정렬이 된 데이터에서 검색은 정렬이 안된 데이터에서 검색보다 쉽다. 그러나 항상 데이터를 정렬된 상태로 만들어 놓아야 하는 수고가 필요하다(새로운 데이터 1개 추가, 데이터 1개 삭제 작업 때).

2.1 정렬 알고리즘

정렬 : n 개의 데이터를 정렬한다.

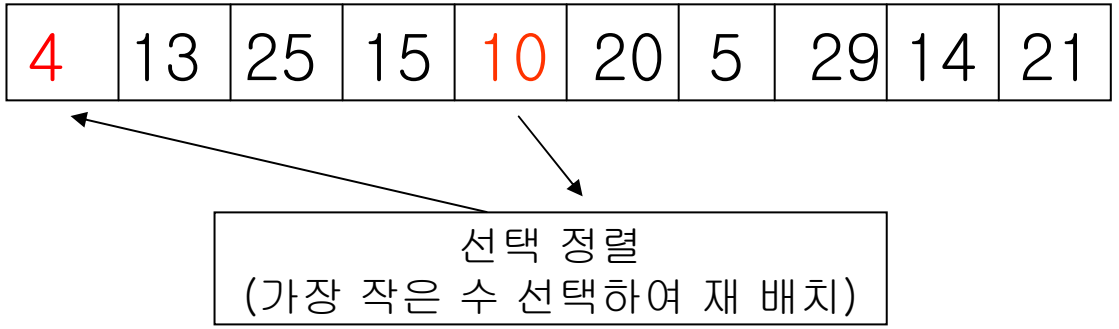
선택정렬 : n개의 데이터를 놓고 가장 작은 수를 골라 정렬될 장소에 이동한다.
위의 과정을 n 번 반복한다.



2.1 정렬 알고리즘

(선택정렬 알고리즘)

• 선택 정렬 알고리즘 (예시)



• 바뀐 결과

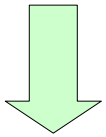
4	13	25	15	10	20	5	29	14	21

2.1 정렬 알고리즘

(선택정렬 알고리즘)

선택 정렬 : n 개의 데이터를 정렬한다.
알고리즘으로 기술된 선택 정렬 방법

정렬되지 않은 데이터에서 가장 작은 수를 골라 정렬된 리스트의 마지막(i 번째)에 붙인다.

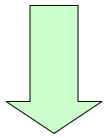


```
for (i=0; i<n-1; i++) {
  list[i] 부터 list[n-1] 까지 비교하여
     가장 작은 수가 list[min]이라 하자;
  list[i] 와 list[min]을 교환한다;
}
```

2.1 정렬 알고리즘

(선택정렬 알고리즘)

```
    for (i=0; i<n-1; i++) {
      list[i] 부터 list[n-1] 까지 비교하여
         가장 작은 수가 list[min]이라 하자;
      list[i] 와 list[min]을 교환한다;
    }
```



```
    for (i=0; i<n-1; i++) /* n-1번 반복 */
    {
      min = i;
      for(j=i+1; j < n; j++) /* 작은 수 선택 */
      { if(list[j] < list[min]) min = j; }
      temp=list[min]; list[min]=list[i]; list[i]=temp;
      /* list[min]과 list[i]를 교환 */
    }
```

2.2 검색 알고리즘

검색(Search) : n 개의 데이터를 검색한다.

가장 간단한 검색 알고리즘은 선형 검색(Sequential Search)알고리즘이다.

n개의 데이터를 놓고 한 개씩 검색하는 방법이다

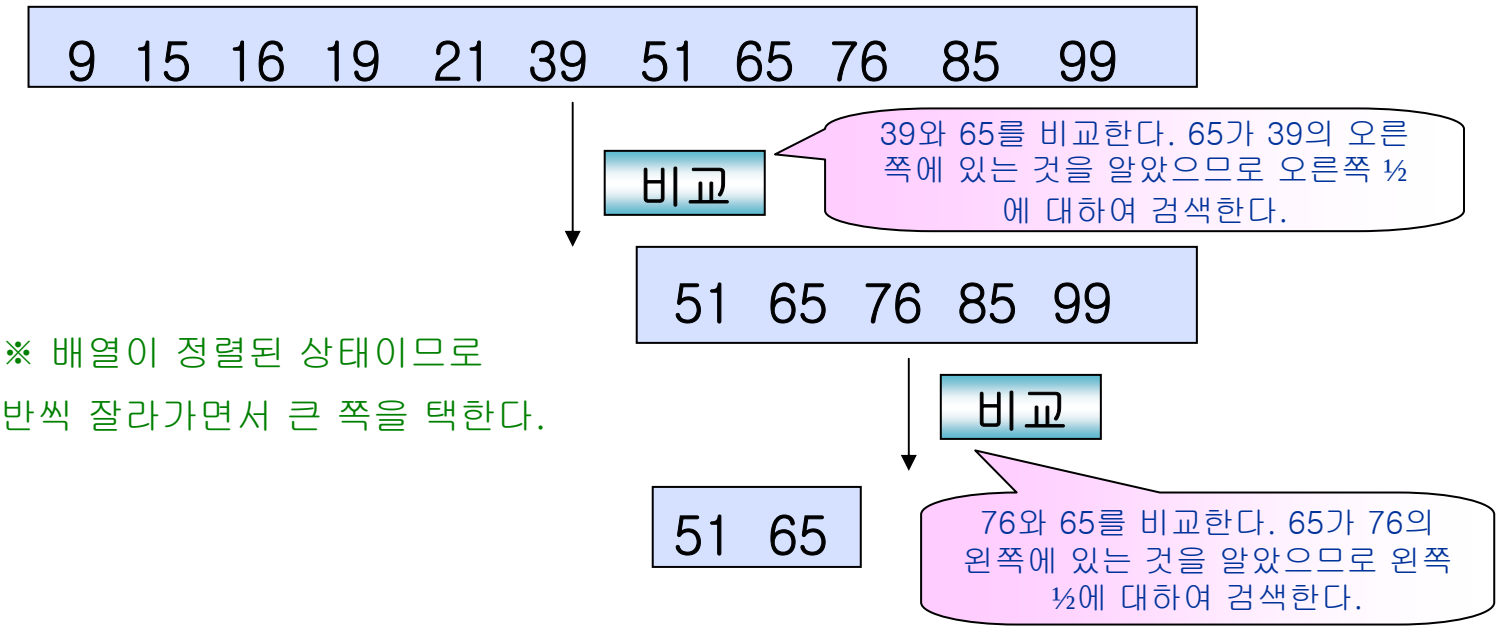
데이터가 정렬이 된 상태에서는 이진 검색(Binary Search) 방법이 더 효율적이다.
이진 검색은 전체 데이터의 중간에 있는 데이터를 비교하면서
찾는 데이터가 앞/뒤 중 어디 있는지 알 수 있다

(찾아야 할 데이터 개수가 ½로 줄어든다.)

2.2 검색 알고리즘

(이진검색 알고리즘)

* 65 찾기



※ 배열이 정렬된 상태이므로
반씩 잘라가면서 큰 쪽을 택한다.

2.2 검색 알고리즘

(이진 검색 알고리즘의 작성)

- **left와 right의 표시**
  - *left*와 *right*는 탐색하고자 하는 배열의 왼쪽, 오른쪽 끝 지점을 가리킨다
  - 초기값으로 *left=0*, *right=n-1*로 설정

- **list의 중간 위치**
  middle = (left+right)/2 설정

- **list[middle]과 searchnum을 비교한다**
  1) searchnum < list[middle]
     right를 middle로 설정(right=middle-1)
  2) searchnum = list[middle]
     middle을 반환(return middle)
  3) searchnum > list[middle]
     left를 middle+1로 설정(left=middle+1)
- 위 과정을 middle값을 다시 계산하여 탐색을 계속한다

2.2 검색 알고리즘

(이진 검색 알고리즘의 작성)

```
/* 반복적인 알고리즘이다, 순환적으로도 작성할 수 있다. */
int binsearch(int list[],int searchnum, int left,int right)
{
   /*searchnum 에 대해 list [0]<=list[1]<= ...<=list[n-1]을 탐색.
    찾으면 그 위치를 반환하고 못 찾으면 -1을 반환한다.*/
    int middle;
    while(left <= right) {
       middle = (left + right) / 2;
       if (list[middle] < searchnum) left = middle+1;
       else if (list[middle] > searchnum) right = middle-1;
       else if (list[middle] == searchnum) return middle;
    }
    return -1; /* 찾지 못함 */
}
```

3. 알고리즘의 성능

- 성능 측정
  - 성능 분석
    : 컴퓨터에 상관없이 시간과 공간의 추산에 초점을 둔다
    : 복잡도 이론 (Complexity Theory)
  - 성능 측정
    : 컴퓨터에 의존적인 시간을 알아 내는 것이다.
    컴퓨터에서 직접 실행하여 정확한 시간을 측정한다.

- 공간 복잡도(Space Complexity)
  : 프로그램을 실행시켜 완료하는데 필요로 하는 기억 장소의 크기

- 시간 복잡도(Time Complexity)
  : 프로그램을 실행시켜 완료하는 데 필요한 컴퓨터 시간의 양을 의미한다

3.1 공간 복잡도(Space Complexity)

- 고정된 공간 영역

프로그램이 실행되는 데이터의 크기와 관계없이 일정한 공간을 필요로 한다.

예) 프로그램 명령어가 차지하는 공간

- 변하는 공간 영역

필요 공간이 데이터의 개수에 따라 변한다. 데이터의 개수를 n이라고 하면 프로그램에 따라 2 x n, 3 x n, n x n의 영역이 필요하다.

▣ 컴퓨터 기억 장소에 제한이 있기 때문에 경우 공간 복잡도는 중요한 요소가 된다.

3.1 공간 복잡도(Space Complexity)

- 필요한 공간의 예 – n개의 데이터를 더하는 프로그램 예

  list[], n, tempsum, i => n+3 개의 데이터 공간

```
float sum(float list[], int n)
  {   float tempsum = 0;
      int i;
      for(i = 0; i < n; i++)
           tempsum += list[i];
      return tempsum;
   }
```

- 필요한 공간

  프로그램 사이즈 = 고정
  데이터 사이즈 = n + 3

3.2 시간 복잡도(Time complexity)

프로그램 P에 의하여 실행되는 시간 T(P)

T(P) = count the number of operations the program performs

T(P)는 기계에 따라 달라진다. 펜티엄 100MHz 기계와 펜티엄 1,000MHz 계에서 같은 프로그램을 실행시킨다면?

3.2 시간 복잡도(Time complexity)

- 프로그램 수행 시간 분석 방법

다음 프로그램은 반복하여 수행되는 프로그램이다
수행 시간이 컴퓨터마다 다르므로 수행 시간에 대한 추정을 해보자

```
1 : float sum(int n) {
2 :   int count=0;
3 :   int i;
4 :   for(i = 0; i < n; i++)
5 :     count+=2;
6 :   count += 3;
7 :   return count;
8 : }
```

실행 순서 :
(n이 2일때)
2-4-5-4-5-4-6-7
(n이 3일때)
2-4-5-4-5-4-5-4-6-7

n=0 일 경우 : for loop은 실행이 되지 않으므로 전체 실행되는 문장 4개 = 2번문, 4번문, 6번문, 7번문

n=0 이 아닐 경우 :

전체 실행되는 문장 2 x n + 4 개 =
2번문 + 4번문, 5번문을 n번 수행
+ 4번문, 6번문, 7번문

3.2 시간 복잡도(Time complexity)

다음 프로그램은 행렬에 있는 데이터 값을 합산하는 프로그램이다.
수행 시간이 컴퓨터마다 다르므로 수행 시간에 대한 추정을 해보자.

```
void add(int a[][M_SIZE],int b[][M_SIZE],
         int c[][M_SIZE],int rows,int cols)
{
  int i, j;
  for(i = 0; i < rows; i++)
    for(j = 0; j < cols; j++)
      c[i][j] = a[i][j] + b[i][j];
}
```

전체 수행되는 횟수 =

2·(행의 수)·(열의 수) + 2·(행의 수) + 1

- rows와 cols를 바꾸면 전체 수행되는 횟수
  = 2·(행의 수)·(열의 수) + 2·(열의 수) + 1

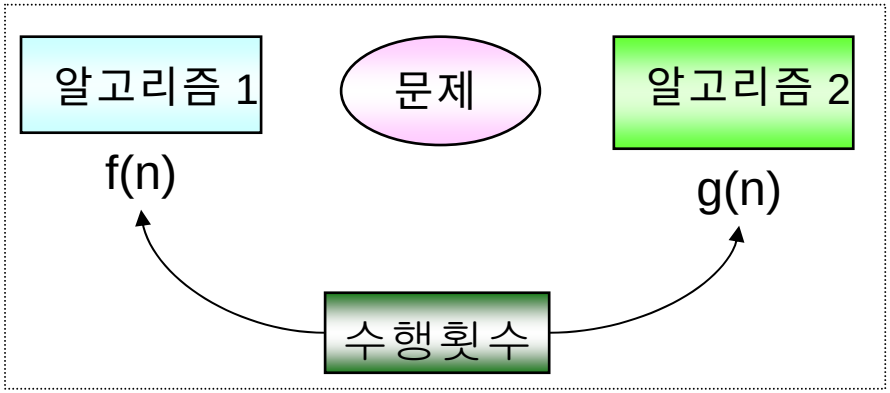
3.2 시간 복잡도(Time complexity)

- 행렬의 덧셈
  행렬의 덧셈을 테이블로 계산 횟수 합산

문 장	s/e	횟 수	전체 횟수
void add(int a[], [Max_SIZE]…)			
{	0	0	0
int i,j;	0	0	0
for(i=0;i<rows;i++)	1	rows+1	rows+1
for(j=0;j<cols;j++)	1	rows • (cols+1)	rows • cols+rows
c[i][j] = a[i][j] + b[i][j];	1	rows • cols	rows • cols
}	0	0	0
전 체			2rows • cols+2rows+1

3.3 알고리즘 분석의 표현법

- 알고리즘의 수행시간을 비교할 때 입력 데이터 개수 n에 대한 함수로 결정된다.
- 같은 작업을 하는 알고리즘이 어느 것이 빠른가?



결정하는 요소 : 시간 복잡도(time complexity)

1)입력의 크기(input size)

- 입력 데이터 n의 크기에 따라 결정된다.

  T(n) = ?

2)입력 데이터의 형태

- 가능한 입력의 형태에 따라

  평균 시간 : A(n) = ?

  최악의 경우 : W(n) = ?

- 보통은 “최악의 경우”에 관심을 갖는다.
- 최악의 경우는 “상한 시간”이 관심 대상이다.

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(O-표기법)

- 알고리즘의 수행시간을 기본이 되는 명령어가 입력데이터 n에 대하여 수행되는 횟수로 나타내면 가장 알기 쉽다
  즉, 어떤 알고리즘이 비교할 때 수행시간을 직접 재는 것보다 입력 데이터 개수 n에 대한 함수로 결정한다

- Big "OH"
  - 정의) 알고리즘 A의 필요한 연산함수 f(n)의 수행 복잡도는 다음을 만족하면 O(g(n))이라고 정의한다.
    => 양의 상수 c와 n_0이 존재하여, 적당한 값 n_0보다 큰 n 값에 대하여 $f(n) \leq c \cdot g(n)$을 만족한다. 즉, 큰 n 값들에 대하여 g(n) 함수 값은 항상 f(n) 함수 값 보다 크거나 같은 상한 값 함수이다. f(n) 함수는 g(n)보다 더 작게 증가한다는 의미이다..

예) $f(n) = 25 \cdot n$, $g(n) = 1/3 \cdot n^2$
  - $25 \cdot n = O(n^2/3)$
    if let c = 1,
    $|25 \cdot n| \leq 1 \cdot |n^2/3|$ for all $n \geq 75$

n	f(n) = 25 x **n**	$g(n) = n^2/3$
1	25	1/3
2	50	4/3
.	.	.
.	.	.
.	.	.
75	1875	1875

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(O-표기법)

* $f(n) = O(g(n))$ 이라고 표기하면
  모든 n, $n \geq n_0$에 대하여 g(n)은 상한함수(upper bound)이다.
* 그러나 어느정도 상한인지는 알수없다.
  $n = O(n^2)$, $n = O(n^{2.5})$
  $n = O(n^3)$, $n = O(2^n)$
* 보통은 g(n)은 f(n)보다 크면서 가장 차이가 적은 함수를 사용한다.

* $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow O(g(n)) = f(n)$

* 정리) if $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$, then $f(n) = O(n^m)$
  증명)
  $f(n) \leq |a_k| \cdot n^k + |a_{k-1}| \cdot n^{k-1} + \ldots + |a_1| \cdot n + |a_0|$
  $= \{|a_k| + |a_{k-1}|/n + \ldots + |a_1|/n^{k-1} + |a_0|/n^k\} \cdot n^k$
  $\leq \{|a_k| + |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\} \cdot n^k$
  $= c \cdot n^k$ $(c = |a_k| + |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)$
  $= O(n^k)$

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(O-표기법)

[연습] O-표기법에 대한 연습을 해보자

예 1) 어떤 알고리즘의 수행 시간 f(n) = 3n + 4 이면
3n + 4 <= 4n이므로 O(n) 이라고 표기할 수 있다.
예 2) f(n) = $2n^2$ + 5n + 3 은 O(n^2) 이다.
예 3) f(n) = 0.01n^3 + 20n^2 + 2n + 3 은 O(n^3) 이다.
예 4) f(n) = 3n + 4 는 O(n) 이고, O(n^2) 이며, O(n^3) 라고 표기할 수 있지만
일반적으로는 O(n) 으로 표기한다.
예 5) f(n) = $2n^2$ + 5n + 3 은 O(n^2) 이지만 O(n) 라고 쓰면 틀린다. (X)
예 6) f(n) = 0.001*nlogn + 5n + 3 은 O(nlogn) 이다.

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(O-표기법)

[참고] 상한함수 외에 하한함수와 동등함수에 대한 표기가 있다.

Omega : 어떤 알고리즘의 수행시간에 대한 하한(lower bound) 함수이다.

정의) f(n) = Ω(g(n))

양의 상수 c와 n_0이 존재하여, 적당한 값 n_0보다 큰 n 값에 대하여 f(n) ≥ c·g(n)이다. 즉, 큰 n 값들에 대하여, g(n) 함수 값은 항상 f(n) 함수 값 보다 같거나 작은 하한 값 함수이다. f(n) 함수는 g(n)보다는 더 빨리 증가한다.

Theta : 어떤 알고리즘의 수행시간에 대한 상한과 하한이 같을 때 표시하는 함수이다

정의) f(n) = Θ (g(n))

양의 상수 c1, c2와 n_0이 존재하여, 적당한 값 n_0보다 큰 n 값에 대하여 c1·g(n) ≤ f(n) ≤ c2·g(n)이다. 즉, 큰 n 값들에 대하여 g(n) 함수 값은 항상 f(n) 함수 값과 비슷하게 증가한다는 의미이다. O 표기법 보다는 더 증가 범위가 더 정확하다. 상한과 하한이 같기 때문에 알고리즘 복잡도가 정확히 어떤 함수인지 알 수 있다.

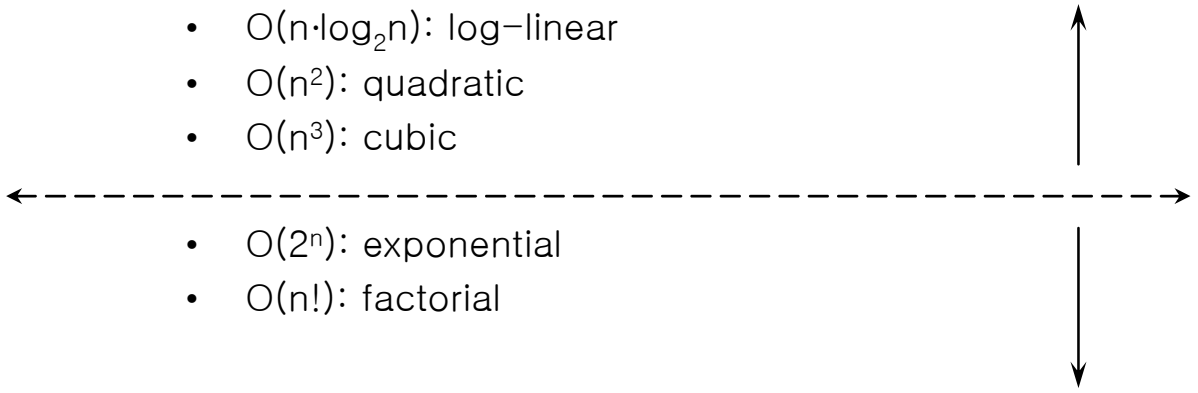
- more precise than both the “big oh” and omega notations
- g(n) is both an upper and lower bound on f(n)

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(알고리즘 O(f(n)) 함수와 함수의 값)

- class of time complexities
  - O(1): constant
  - O($\log_2 n$): logarithmic
  - O(n): linear
  - O($n \cdot \log_2 n$): log-linear
  - O(n^2): quadratic
  - O(n^3): cubic

다항식 시간 복잡도
(polynomial time)



  - O(2^n): exponential
  - O(n!): factorial

지수 시간복잡도
(exponential time)

3.3 알고리즘 분석의 표현법

(알고리즘 O(f(n)) 함수와 함수의 값)

컴퓨터로 해결이 가능한 함수들

		n의 값					
함수	함수이름	1	2	4	8	16	32
1	constant	1	1	1	1	1	1
log n	logarithmic	0	1	2	3	4	5
n	linear	1	2	4	8	16	32
n log n	log linear	0	2	8	24	64	160
n^2	quadratic	1	4	16	64	256	1024
n^3	cubic	1	8	64	512	4096	32768
2^n	exponential	2	4	16	256	65536	4294967296
n!	factorial	1	2	24	40326	20922789888000	$26313X10^{33}$

컴퓨터로 해결이 불가능한 함수들 – 매우 빠르게 증가한다.

Review

⦿ 알고리즘은 컴퓨터가 일을 하는 과정을 기술하는 방법이다.

일상생활의 알고리즘 : 사람의 일 처리

컴퓨터의 알고리즘 : 컴퓨터의 장점인 연산, 비교, 판단에 관한 알고리즘

⦿ 정렬과 검색 알고리즘

알고리즘에서 가장 기본이 되는 알고리즘은 정렬과 검색 알고리즘이다.

⦿ 알고리즘의 성능 표기법

- 알고리즘이 수행되는 시간을 입력 데이터의 개수 n에 대한 함수로 표현할 수 있다.
- O-표기법은 알고리즘이 수행되는 시간의 상한 함수이다.
- 문제에 대하여 O(f(n)), O(g(n)) 알고리즘이 있다면 f(n) > g(n)인 경우 O(g(n)) 알고리즘이 효율적이다.
- O(f(n))의 f(n)이 지수 함수이거나 factorial 함수이면 문제는 컴퓨터로 해결이 어렵다.